EX 15 :

1) $f(x) = Lnx$

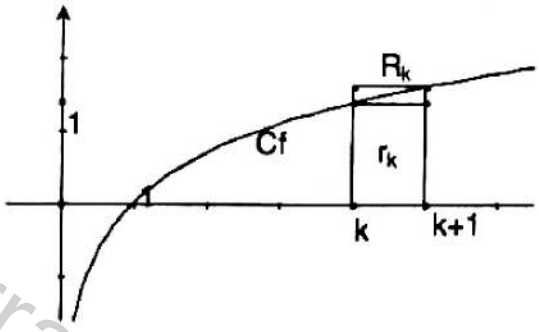
$D_f = IR_+^*$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \; ; \; \forall x \in IR_+^*$

x	0	$+\infty$
f'(x)	|	+
f(x)	|	$+\infty$ / $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x} = 0$

B.I .Parabolique de direction celle de $(o, \vec{i})$



2) $S_n = Ln1 + Ln2 + ... + Ln(n)$

$T_n = Ln1 + Ln2 + ... + Ln(n-1)$

En utilisant la méthode des rectangles

$aire(r_k) \le \int_k^{k+1} Lnxdx \le aire(R_k)$

(Voir figure)

$\Rightarrow Lnk \le \int_k^{k+1} Lnxdx \le Ln(k+1)$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} Lnk \le \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} Lnxdx \le \sum_{k=1}^{n-1} Ln(k+1)$

$\Rightarrow T_n \le \int_1^n Lnxdx \le S_n$

3)

$* \; S_n = Ln(1 \times 2 \times 3 \times ..... \times n)$

$S_n = Ln(n!)$

$T_n = Ln\left[(n-1)!\right]$

$\int_1^n Lnxdx = \left[xLnx - x\right]_1^n$

$= nLn - n + 1$

D'après 2)

$\boxed{Ln\left[(n-1)!\right] \le nLn - n + 1 \le Ln(n!)} \; (I)$

$* \; nLnn - n + 1 = Ln(n^n) - Ln(e^n) + Lne$

$= Ln\left(\frac{n^n}{e^n}\right) + Lne$

$= Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

D'après (I) :

$Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] \le Ln(n!)$

$\Rightarrow \boxed{e.\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n!} \; (1)$

$* \; Ln\left[(n-1)!\right] \le Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln\left[(n-1)!\right] + Lnn \le Lnn + Ln\left[e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow Ln(n!) \le Ln\left[ne\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$

$\Rightarrow \boxed{n! \le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n} \; (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$

EX 16 :

$f(x) = (x+1).Ln|x-3|$

1) $D_f = IR \setminus \{3\}$

2)

a) $f'(x) = Ln|x-3| + (x+1).\frac{1}{x-3}$

$f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + Ln|x-3|$

b) $f''(x) = \frac{-4}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}$

$f''(x) = \frac{x-7}{(x-3)^2}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn